Programação Linear

Rosa Canelas

2010

Problemas de Optimização

- São problemas em que se procura a melhor solução (a que dá menor prejuízo, maior lucro, a que é mais eficiente, etc.)

- Alguns destes problemas resolvem-se procurando máximos ou mínimos de uma função, outros resolvem-se por outros processos.

Programação Linear

- É um ramo da Matemática que estuda formas de resolver problemas de optimização cujas condições podem ser expressas por inequações lineares, isto é inequações do primeiro grau.

- Um problema de programação linear que tenha só duas variáveis pode ser resolvido graficamente, representando as soluções de cada uma das inequações por um semiplano e em seguida procurando o ponto do polígono obtido que corresponde à solução óptima.

Problema de Programação Linear

- Num problema de programação linear com duas variáveis x e y o que se pretende é **maximizar (ou minimizar) uma forma linear**

$$\mathbf{z = A\,x + B\,y}$$

A e **B** são constantes reais não nulas.

- A forma linear traduz a **função objectivo** nas variáveis x e y.

- as variáveis x e y estão sujeitas a certas condições restritivas expressas por inequações lineares em x e y que traduzem as **restrições do problema.**

Problema

- Uma fábrica de confecções produz dois modelos de camisas de luxo.
- Uma camisa do modelo A necessita de 1 metro de tecido, 4 horas de trabalho e custa 120€.
- Uma camisa do modelo B exige 1,5 metros de tecido, 3 horas de trabalho e custa 160€.
- Sabendo que a fábrica dispõe diariamente de 150 metros de tecido, 360 horas de trabalho e que consegue vender tudo o que fabrica, quantas camisas de cada modelo será preciso fabricar para obter um rendimento máximo?

Tabela com o registo dos dados

	Metros de tecido	Horas de trabalho	Preço (em euros)
Modelo A	1	4	120
Modelo B	1,5	3	160
Disponibilidades	150	360	

Escolher as variáveis

- Uma fábrica de confecções produz dois modelos de camisas de luxo.
- quantas camisas de cada modelo será preciso fabricar...?
  - x – nº de camisas de modelo A
  - y – nº de camisas de modelo B

Restrições do problema

$$\begin{cases} x + 1{,}5y \leq 150 \\ 4x + 3y \leq 360 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- x é o nº de m de tecido gastos para confeccionar as camisas do modelo A.
- 1,5y é o nº de m de tecido gastos na confecção das camisas do modelo B.
- 150 é o nº de metros de que a fábrica dispõe diariamente.

- 4x é o nº de horas gastas a confeccionar as camisas do modelo A
- 3y é o nº de horas gastas a confeccionar as camisas do modelo B
- 360 é o nº total de horas de trabalho diário.

- O número de camisas de cada modelo tem de ser não negativo.

Região admissível

- Polígono convexo definido pelas restrições do problema.

$$\begin{cases} x+1{,}5y \le 150 \\ 4x+3y \le 360 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le -\frac{2}{3}x+100 \\ y \le -\frac{4}{3}x+120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

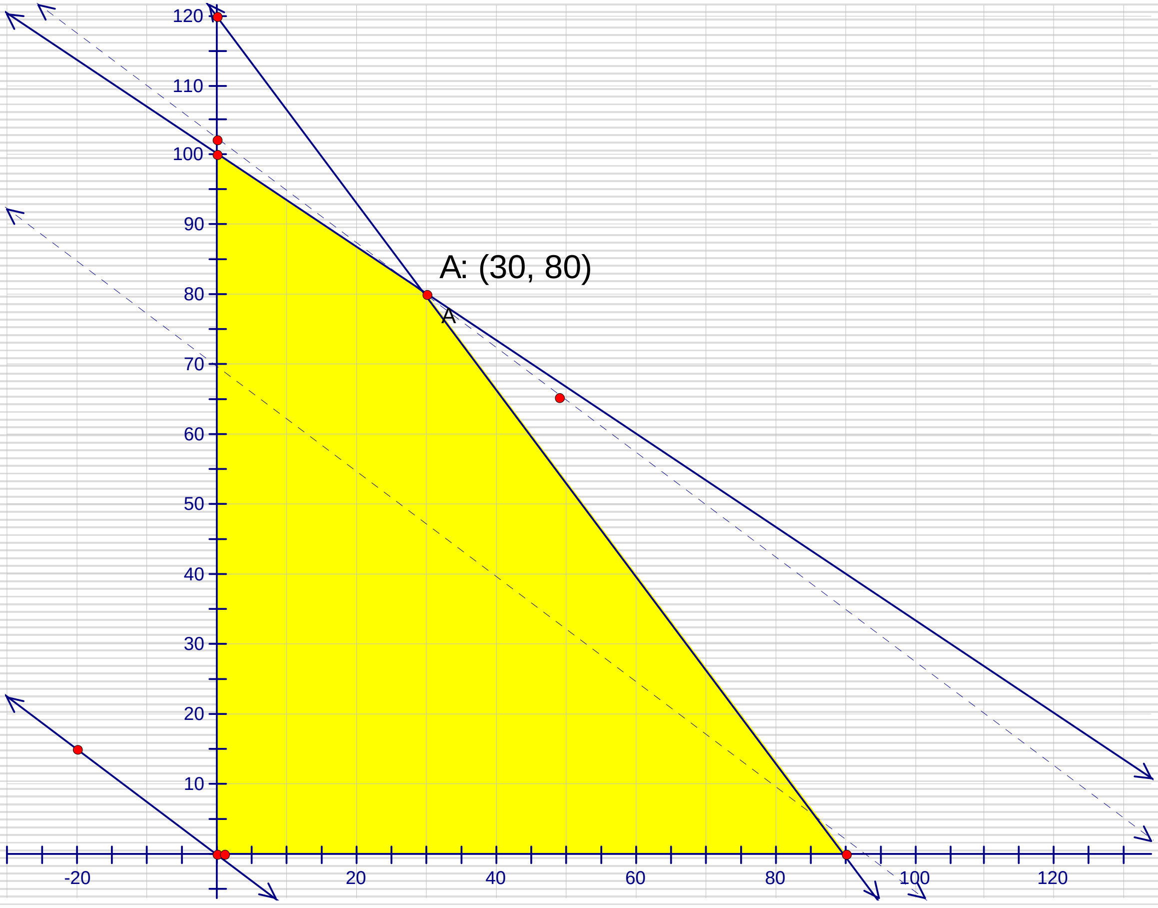
Função objectivo

- $z = 120\ x + 160\ y$

$$z = 120x + 160y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{z}{160}$$

- Maximizar z significa maximizar z/160 que é a ordenada na origem da recta.
- Traçamos uma recta qualquer **d** com declive -3/4 , pode ser a recta de equação y = -3/4x.
- Deslocamos uma recta paralelamente a **d** para encontrarmos uma recta que tenha pelo menos um ponto na região admissível e que corte Oy no ponto com maior ordenada possível.

Resolução gráfica



Será preciso fabricar, por dia, 30 camisas do modelo A e 80 do modelo B para que a fábrica tenha o máximo de rendimento.

Resolução analítica

- Para resolvermos analiticamente temos de aceitar algumas regras:
  - Se um problema de programação linear tem uma solução, esta está localizada num dos vértices da região admissível.
  - Se um problema de programação linear tem múltiplas soluções, pelo menos uma delas está localizada num dos vértices da região admissível.
  - Em qualquer dos casos o valor correspondente da função objectivo é único.

Resolução analítica

- As coordenadas dos quatro vértices são: (0,0), (0,100), (30,80) e (90,0).
- Para cada um dos pares teremos de obter o valor da função objectivo, eliminamos o par (0,0).

$$(0,100) \rightarrow z = 120 \times 0 + 160 \times 100 = 16000$$

$$(30,80) \rightarrow z = 120 \times 30 + 160 \times 80 = 16400$$

$$(90,0) \rightarrow z = 120 \times 90 + 160 \times 0 = 10800$$

A solução óptima será então
x = 30 e y = 80
E o rendimento é 16400€.

Passos para a resolução de um problema de programação linear

- Organizar os dados
- Escolher as variáveis
- Escrever as restrições
- Representar graficamente as inequações e definir a região admissível.
- Definir a função objectivo e representar uma recta da família.
- Indicar a solução óptima ou soluções óptimas.
- Calcular o valor da função objectivo nos vértices da região admissível e confirmar a solução obtida graficamente.